

DS Modélisation - 10/01/2025

Partie Physique

Partie I

Q1. Sur les spectres (FFT), l'amplitude maximale des raies est atteinte pour la fréquence fondamentale du signal, c'est-à-dire le premier pic apparaissant sur le spectre. Ainsi, on obtient les amplitudes :

- Pour le bras : $\approx 8g$ pour une fréquence $f \approx 2,5 \text{ Hz}$;
- Pour la poitrine : $\approx 5g$ pour une fréquence $f \approx 2,5 \text{ Hz}$;
- Pour la hanche : $\approx 7g$ pour une fréquence $f \approx 2,5 \text{ Hz}$.

Q2. Sur le schéma de la **Fig. 3**, on remarque que la longueur de foulée, notée L , correspond en fait à la période du signal récupéré notée $T = \frac{1}{f}$ avec $f \approx 2,5 \text{ Hz}$, car chaque pas (pied gauche et pied droit) donne un point d'impact. Ainsi, la vitesse moyenne de course v est telle que :

$$v = \frac{L}{T} = Lf \quad \text{soit} \quad \boxed{L = \frac{v}{f}}$$

Alors, on a :

$$L \approx \frac{6,4 \cdot 10^3}{3600 \times 2,5} = \frac{64 \cdot 10^2}{36 \cdot 10^2 \times \frac{5}{2}} = \frac{64 \times 2}{36 \times 5} = \frac{128}{180} \approx \frac{13}{18} \approx \frac{4}{6} \quad \text{soit} \quad \boxed{L \approx 0,8 \text{ m} = 80 \text{ cm}}$$

Cette valeur est cohérente car elle correspond environ à la longueur d'une jambe. De plus, dans l'exemple étudié ici, le coureur court lentement, et on peut donc imaginer qu'il fait des petites foulées.

Q3. On voit sur le schéma de la **Fig. 3** que le bras droit du coureur oscille entre deux positions extrêmes d'environ 80° vers l'arrière (par rapport à la verticale) et d'environ 30° vers l'avant.

Ainsi, l'amplitude angulaire du mouvement des bras est d'environ $\boxed{110 \pm 10^\circ}$.

On exploite préférentiellement les mouvements de balancier des membres du coureur car ce sont les mouvements qui produisent les accélérations les plus fortes, assurant ainsi une meilleure précision des mesures.

Partie II

Q4. La loi de modération de Lenz indique que les conséquences du phénomène d'induction électromagnétique s'opposent aux causes qui les ont produites.

Ici, lorsque la bille se déplace le long de l'axe (Oz), le flux du champ magnétique à travers la spire ϕ , qui dépend de z , varie et il y a donc, d'après la loi de Faraday, production d'une force électromotrice au sein de la spire. Puisque celle-ci dispose d'une résistance, il y a donc création d'un courant induit dans la spire.

Le signe de ce courant, orienté selon le vecteur \vec{e}_ϕ , dépend du sens de déplacement de la bille :

- Si la bille se rapproche de la spire, r et z diminuent et donc le flux ϕ augmente, et le courant I est donc créé dans la spire pour faire diminuer ce flux, ce qui crée un moment magnétique formant un champ magnétique opposé au champ \vec{B} de la bille. Ainsi, le champ magnétique induit doit être orienté pour repousser la bille, donc dans le sens donné par $-\vec{e}_z$. Pour cela, d'après la règle de la main droite, le courant I doit être négatif.
- A l'inverse, si la bille s'éloigne de la spire, le courant I doit être positif.

Q5. On a l'expression du flux :

$$\phi = \frac{\mu_0 m R_b^2}{2} (z^2 + R_b^2)^{-3/2}$$

D'après la loi de Faraday, la fem induit e_{ind} dans les N spires est donnée par :

$$e_{ind} = -N\dot{\phi} = -N \times \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{\mu_0 m R_b^2}{2} 2\dot{z}z (z^2 + R_b^2)^{-5/2} = \frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2} \frac{\dot{z}z}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}}$$

Ainsi :

$$e_{ind} = -\frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2} \frac{vz}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}}$$

L'ensemble des N spires ayant une résistance totale R_c , on utilise la loi d'Ohm pour obtenir le courant induit :

$$e_{ind} = R_c I \quad \text{soit} \quad I = -\frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2R_c} \frac{vz}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}}$$

Enfin, la puissance électrique extraite \mathcal{P}_e est simplement obtenue en utilisant sa définition soit $\mathcal{P}_e = e_{ind} \times I = R_c I^2$, soit :

$$\mathcal{P}_e = \left(\frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2R_c} \right)^2 \frac{z^2}{(z^2 + R_b^2)^5} v^2$$

Q6. En mécanique, on utilise généralement la convention générateur et ainsi, on a la relation traduisant la conservation de l'énergie (ou de la puissance) :

$$\mathcal{P}_m = -\mathcal{P}_e = -\left(\frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2R_c} \right)^2 \frac{z^2}{(z^2 + R_b^2)^5} v^2$$

et donc finalement, par identification :

$$c_e = \left(\frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2R_c} \right)^2 \frac{z^2}{(z^2 + R_b^2)^5}$$

Pour maximiser la conversion d'énergie, il faut maximiser le facteur c_e , qui dépend de nombreux paramètres.

Tout d'abord, si N augmente, alors c_e augmente et on pourrait donc imaginer un dispositif avec un plus grand nombre de spires. Néanmoins, ce nombre de spires est limité par la contrainte d'espace disponible pour monter le système.

De plus, si m augmente, alors c_e augmente et il faudrait donc choisir un matériau avec de meilleures propriétés d'aimantation. Ce choix peut être limité par le coût financier du dispositif.

En outre, Si R_c diminue, alors c_e augmente et il faudrait donc choisir pour les fils électriques un matériau avec une bonne conductivité électrique. Ce choix peut également être limité par le coût financier.

Enfin, la dépendance de c_e en R_b est à étudier. On pourrait être tenté de dire que si R_b augmente alors c_e augmente. Mais, il se trouve que si l'on se place à $z \ll R_b$, on obtient une expression en $1/R_b^6$ et donc si R_b diminue alors c_e augmente. Cela est plutôt logique car si R_b diminue, la bobine est plus "proche" de la bille et donc leur interaction est plus importante. En revanche, le choix de diminuer R_b peut être limité par la taille de la bille étant donné qu'il est impossible d'avoir R_b plus petit que le rayon de celle-ci.

Remarque : on pourrait être tenté de dire que la fonction $f : z \rightarrow \frac{z^2}{(z^2 + R_b^2)^5}$ devrait être maximisée. Néanmoins, comme il sera vu dans la suite, il faut intégrer dans le temps cette fonction entre deux positions (donc deux valeurs de z) pour obtenir l'énergie correspondante. Ainsi, une discussion sur l'effet du paramètre z n'a ici pas de sens physique, car la bille se déplace sur l'axe (Oz) .

Q17. Pour déterminer les positions d'équilibre de la bille, il faut déterminer les valeurs de β pour lesquelles $\frac{dE_p}{d\beta} = 0$. Ces positions sont stables si et seulement si $\frac{d^2 E_p}{d\beta^2} > 0$ en ces points.

On commence donc par calculer les dérivées de E_p et on sait aussi que le courant I contenu dans l'expression de l'énergie potentielle change de signe selon si la bille s'approche ou s'éloigne de la bobine.

On a :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ind}(G) = -\frac{\mu_0 m I R_b^2}{2(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \cos(\beta)$$

et donc :

$$\frac{dE_p}{d\beta} = \frac{\mu_0 m I R_b^2}{2(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \sin(\beta) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 E_p}{d\beta^2} = \frac{\mu_0 m I R_b^2}{2(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \cos(\beta)$$

Alors, la bille est dans une position d'équilibre si :

$$\frac{dE_p}{d\beta}(\beta_{eq}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\beta) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta_{eq} = 0 \text{ ou } \pi}$$

et ce résultat est vrai quel que soit le signe de I , donc quel que soit le sens de déplacement de la bille.

Cette position d'équilibre est stable si et seulement si $\frac{d^2E_p}{d\beta^2} > 0$. Or ici, le signe de I intervient dans la dérivée seconde de l'énergie potentielle, et il faut donc distinguer les deux cas :

- Si la bille s'approche de la bobine, alors $I < 0$ comme vu précédemment, et donc il faut avoir $\cos(\beta_{eq,stable}) < 0$ soit finalement : $\boxed{\beta_{eq,stable} = \pi}$. On retrouve bien le résultat de l'énoncé disant que si la bille s'approche, alors elle a tendance à se retourner pour annuler les effets de l'induction. La position $\beta = 0$ serait une position d'équilibre instable ici.
- Si la bille s'éloigne de la bobine, alors $I > 0$ comme vu précédemment (en déduisant), et donc il faut avoir $\cos(\beta_{eq,stable}) > 0$ soit finalement : $\boxed{\beta_{eq,stable} = 0}$. On retrouve bien le résultat de l'énoncé disant que si la bille s'éloigne de la bobine, alors elle a tendance à aligner son axe polaire avec l'axe de cette dernière. La position $\beta = \pi$ serait ici une position d'équilibre instable.

Q18. On doit commencer par calculer le couple donné dans l'énoncé :

$$\overrightarrow{C}_{ind}(G) = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}_{ind}(G) = m (\cos(\beta)\overrightarrow{e}_z + \sin(\beta)\overrightarrow{e}_x) \wedge \frac{\mu_0 I R_b^2}{2(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \overrightarrow{e}_z$$

et donc finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{C}_{ind}(G) = -\frac{\mu_0 m I R_b^2}{2(R_b^2 + z^2)^{3/2}} \sin(\beta) \overrightarrow{e}_y}$$

On vérifie que ce résultat est cohérent dans le cas où $\beta \in [0; \pi]$ donc tel que $\sin(\beta) \geq 0$:

- Si la bille s'approche, alors $I < 0$ et donc ce couple est orienté selon $+\overrightarrow{e}_y$ ce qui a tendance, d'après la règle de la main droite, à retourner la bille ;
- Si la bille s'éloigne, alors $I > 0$ et donc ce couple est orienté selon $-\overrightarrow{e}_y$ ce qui a tendance, d'après la règle de la main droite, à aligner le moment magnétique de la bille avec l'axe de la bobine.

Ainsi, lorsque la bille se déplace à vitesse constante sur l'induit, elle subit des frottements et chocs sur les parois, ce qui modifie constamment son orientation. La présence de ce couple lui permet donc, d'après la vérification ci-dessus, de retrouver sa position d'équilibre stable après chaque changement d'orientation ainsi subi.

Q7. L'intervalle \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0.

Soit $z \in \mathbb{R}$.
$$\mathcal{P}_e(-z) = \frac{A(-z)^2}{((-z)^2 + R_0^2)^5} = \frac{Az^2}{(z^2 + R_0^2)^5} = \mathcal{P}_e(z).$$
 donc $\boxed{\mathcal{P}_e \text{ est paire.}}$

On en déduit que la courbe représentative de \mathcal{P}_e est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, i.e. $\boxed{\text{les variations de } \mathcal{P}_e \text{ sont symétriques autour de } z=0.}$

Q8. \mathcal{P}_e est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur est non nul.

$\forall z \in \mathbb{R}$,
$$\frac{d\mathcal{P}_e}{dz} = \frac{2Az(z^2 + R_0^2)^5 - Az^2 \times 5 \times 2z(z^2 + R_0^2)^4}{[(z^2 + R_0^2)^5]^2} = \frac{(z^2 + R_0^2)^4 [2Az(z^2 + R_0^2) - 10Az^3]}{(z^2 + R_0^2)^{10}}$$

$$= \frac{2AR_0^2 z - 8Az^3}{(z^2 + R_0^2)^6} = \boxed{\frac{2Az(R_0^2 - 4z^2)}{(z^2 + R_0^2)^6}}$$

$$\frac{d\mathcal{P}_e}{dz} = 0 \Leftrightarrow z=0 \text{ ou } R_0^2 - 4z^2 = 0 \Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \frac{R_0}{2} \text{ ou } -\frac{R_0}{2}$$

On a ainsi :

| | | | |
|-----------------------------|---|-----------------|------------|
| z | 0 | $\frac{R_0}{2}$ | $+\infty$ |
| $\frac{d\mathcal{P}_e}{dz}$ | 0 | + | - |
| \mathcal{P}_e | | \nearrow | \searrow |

$\leftarrow z \geq 0$ sur cet intervalle donc $\frac{d\mathcal{P}_e}{dz}$ du signe de $R_0^2 - 4z^2$

En particulier, $\boxed{\mathcal{P}_e \text{ admet un maximum global en } z = \frac{R_0}{2}}$ qui vaut

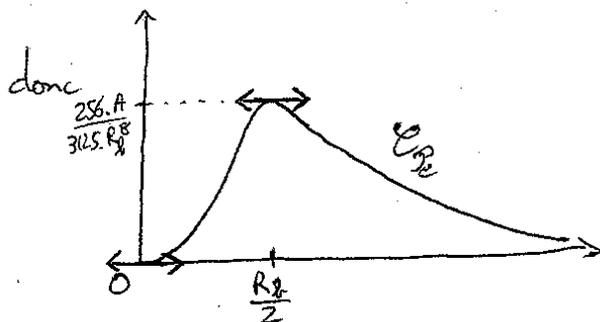
$$\mathcal{P}_e\left(\frac{R_0}{2}\right) = \frac{A \times R_0^2 / 4}{\left(\frac{R_0^2}{4} + R_0^2\right)^5} = \frac{AR_0^2}{4 \times \left(\frac{5R_0^2}{4}\right)^5} = \frac{4^4 \cdot A}{5^5 R_0^8} = \frac{256 \cdot A}{3125 \cdot R_0^8}$$

Q9. On a $\mathcal{P}_e(z) \underset{+\infty}{\sim} \frac{Az^2}{(z^2)^5} = \frac{A}{z^8}$ donc $\boxed{\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_e(z) = 0}$

On en déduit que la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Q10. D'après Q8 et Q9:

| | | | |
|-----------------|---|--|-----------|
| z | 0 | $\frac{R_0}{2}$ | $+\infty$ |
| \mathcal{P}_e | 0 | $\frac{256 \cdot A}{3125 \cdot R_0^8}$ | 0 |



Q11. La fonction $z \mapsto \mathcal{P}_e(z)$ est continue sur \mathbb{R} . On étudie donc $\int_{-\infty}^0 \mathcal{P}_e(z) dz$ et $\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz$. Ces deux intégrales sont de même nature car \mathcal{P}_e est paire (Q7), il suffit donc d'en étudier une seule. On a $\mathcal{P}_e(z) \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{z^8}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dz}{z^8}$ est convergente (intégrale de Riemann) donc par équivalence de fonctions positives $\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz$ est convergente. Par conséquent $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz \text{ est convergente}}$.

Q12. $z = R_f \cdot \tan u$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 croissante de $[0; \frac{\pi}{2}[$ dans $[0; +\infty[$. Comme I_n est convergente (admis dans l'énoncé):

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(R_f^2 \tan^2 u + R_f^2)^n} \times R_f (1 + \tan^2 u) du \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{R_f (1 + \tan^2 u)}{R_f^{2n} (\tan^2 u + 1)^n} du = \frac{1}{R_f^{2n-1}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{(1 + \tan^2 u)^{n-1}} \end{aligned}$$

$1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$

$$\boxed{\frac{1}{R_f^{2n-1}} \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2(n-1)} du}$$

Q13. On pose $\begin{cases} v = \cos^{2n+1} u \\ w' = \cos u \end{cases}$ donc $\begin{cases} v' = (2n+1)(-\sin u) \cos^{2n} u \\ v = \sin u \end{cases}$

Comme u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+2} du = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u) \times \cos(u) du \\ &= \left[\sin(u) \cos^{2n+1}(u) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (2n+1) \sin^2(u) \cos^{2n}(u) du \\ &= 0 + (2n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(u)) \cos^{2n}(u) du \\ &= (2n+1) \left[\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(u) du - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(u) du \right] \\ &= (2n+1) (W_{2n} - W_{n+1}) \end{aligned}$$

} linéarité de l'intégrale

Ainsi $\underbrace{W_{n+1} + (2n+1)W_{n+1}}_{= (2n+2)W_{n+1}} = (2n+1)W_{2n}$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}}$

$$Q14. \cdot W_0 = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^0 du = \int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2}$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n) : \ll W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi \gg$.

Initialisation: D'une part $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et d'autre part $\frac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0 + 1} \times (0!)^2} \pi = \frac{1}{2 \times 1} \pi = \frac{\pi}{2}$
donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité: Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$W_{n+1} \stackrel{Q13}{=} \frac{2n+1}{2n+2} W_n \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{2n+1}{2(n+1)} \times \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi$$

terme ajouté
pour faire
apparaître
 $(2(n+1))!$ au
numérateur

$$= \frac{2n+2}{2(n+1)} \times \frac{2n+1}{2(n+1)} \times \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3} ((n+1)!)^2} \pi = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)+1} ((n+1)!)^2} \pi \quad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi$$

Q15. * On part du membre de droite qui semble le plus compliqué.

$$2A (I_4 - R_b^2 \cdot I_5) \stackrel{\text{def } I_n}{=} 2A \left(\int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^4} - R_b^2 \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^5} \right)$$

↳ linéarité
intégrale

$$= 2A \int_0^{+\infty} \frac{z^2 + R_b^2 - R_b^2}{(z^2 + R_b^2)^5} dz$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{Az^2}{(z^2 + R_b^2)^5} dz$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz \quad \text{↳ } \mathcal{P}_e \text{ est paire (Q7)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz = \boxed{\sum_e^T}$$

* D'après Q12, on a $I_n = \frac{1}{R_b^{2n-1}} W_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ainsi } \sum_e^T = 2A (I_4 - R_b^2 I_5) = 2A \left(\frac{1}{R_b^7} W_3 - \frac{R_b^2}{R_b^9} W_4 \right) = \boxed{\frac{2A}{R_b^7} (W_3 - W_4)}$$

$$Q16. \text{ D'après Q14, } W_3 = \frac{(2 \times 3)!}{2^{2 \times 3 + 1} \times (3!)^2} \pi = \frac{6!}{2^7 \times 6^2} \pi = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2 \times 2^2 \times 2^4 \times 6 \times 2 \times 3} \pi = \boxed{\frac{5}{2^5} \pi} = \frac{5}{32} \pi$$

(De même $W_4 = \frac{8!}{2^3 \times (4!)^2} \pi = \frac{35}{2^8} \pi \leftarrow \text{pas simple.}$)

Mieux: D'après Q13, $W_{n+1} = W_{3n+1} = \frac{7}{8} W_3$.

Ainsi $\sum_e^T \stackrel{Q15}{=} \frac{2A}{R_8^7} (W_3 - \frac{7}{8} W_3) = \frac{2A}{R_8^7} \times \frac{1}{8} W_3 = \frac{A}{4R_8^7} \times \frac{5}{2^5} \pi = \boxed{\frac{5A\pi}{2^7 R_8^7}}$ qui

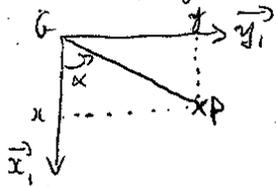
est bien le résultat attendu (cf Q11) puisque $2^7 = 128$.

====

~~scribble~~

Q23. En projetant Π sur l'axe (G, \vec{z}_1) , on a directement $z = \rho \cos \beta$.

En projetant Π sur la droite (GP) , on a $GP = \rho \cdot \sin \beta$.



En projetant \vec{GP} sur l'axe (G, \vec{x}_1) , on obtient $x = GP \cdot \cos \alpha = \rho \sin \beta \cdot \cos \alpha$

et sur l'axe (G, \vec{y}_1) , on obtient $y = GP \cdot \sin \alpha = \rho \sin \beta \sin \alpha$

Q24. On a $J = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta & -\rho \sin \alpha \sin \beta & \rho \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \rho \cos \alpha \sin \beta & \rho \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \beta & 0 & -\rho \sin \beta \end{pmatrix}$

$\det J \stackrel{\text{linéarité}}{=} \rho^2 \sin \beta \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \beta & 0 & -\sin \beta \end{vmatrix}$

$\stackrel{\text{dvp } C_2}{=} \rho^2 \sin \beta \cdot \left[+\sin \alpha \begin{vmatrix} \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \beta & -\sin \beta \end{vmatrix} + \cos \alpha \begin{vmatrix} \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \\ \cos \beta & -\sin \beta \end{vmatrix} \right]$
 $= \rho^2 \sin \beta \cdot \left[\sin \alpha (-\sin \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \beta \sin \alpha) + \cos \alpha (-\cos \alpha \sin^2 \beta - \cos \alpha \cos^2 \beta) \right]$
 $= \rho^2 \sin \beta \left[-\sin^2 \alpha (\underbrace{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}_{=1}) - \cos^2 \alpha (\underbrace{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}_{=1}) \right]$
 $= -\rho^2 \sin \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \boxed{-\rho^2 \sin \beta}$

Q25. On a $d(\Pi, G, \vec{z}_1) = PG \stackrel{Q23}{=} \rho \sin \beta$.

et $|\det J| \stackrel{Q24}{=} |-\rho^2 \sin \beta| = \rho^2 |\sin \beta| \stackrel{\beta \in [0, \pi]}{=} \rho^2 \sin \beta$ donc $\sin \beta \geq 0$

Ainsi $I(G, \vec{z}_1) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho \sin \beta)^2 \rho^2 \sin \beta \, d\beta \, dx \, d\rho$

$\stackrel{\text{variables séparables}}{=} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^4 \sin^3 \beta \, d\beta \, dx \, d\rho$

$= \int_0^R \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^R \times 2\pi \times \int_0^\pi \sin^3 \beta \, d\beta$

$= \boxed{\frac{2\pi}{5} R^5 \int_0^\pi \sin^3 \beta \, d\beta}$

$$\begin{aligned}
 \text{Q26. } \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \stackrel{\text{Binôme Newton}}{=} \frac{1}{-8i} (e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}) \\
 &= \frac{-1}{4} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{-1}{4} (\sin(3x) - 3\sin x) \\
 &= \boxed{\frac{3\sin x - \sin(3x)}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Q27. } \text{D'après Q25, } I(G, \vec{z}_i) = \frac{2}{5} \pi \bar{\rho} R_b^5 \int_0^\pi \sin^3 \beta \, d\beta$$

$$\stackrel{\text{Q26}}{=} \frac{2}{5} \pi \bar{\rho} R_b^5 \times \frac{1}{4} \int_0^\pi (3\sin \beta - \sin(3\beta)) \, d\beta$$

$$= \frac{1}{10} \pi \bar{\rho} R_b^5 \left[-3\cos \beta + \frac{\cos(3\beta)}{3} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{10} \pi \bar{\rho} R_b^5 \left[-3 \times (-1) + \frac{-1}{3} - \left(-3 \times 1 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{10} \pi \bar{\rho} R_b^5 \left(3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{10} \pi \bar{\rho} R_b^5 \times \frac{16}{3}$$

$$= \frac{4}{10} \times R_b^2 \times \frac{4}{3} \pi R_b^3 \cdot \bar{\rho}$$

$$= \boxed{\frac{2}{5} R_b^2 \times m_b}$$

↓ la bille est une sphère de rayon R_b et de masse volumique $\bar{\rho}$ donc sa masse est $m_b = \bar{\rho} \times \text{Volume} = \bar{\rho} \times \frac{4}{3} \pi R_b^3$

Correction DS modélisation partie SII :

III) Comportement mécanique du générateur :

III.1) Mouvement d'excitation :

1 Q19) En s'appuyant sur les résultats de la Q3), on suppose que le mouvement du bras est une sinusoïde d'amplitude $L_m = 45^\circ$. $\omega = 2\pi f = 16 \text{ rad/s}$

2 Q20) $\{\vec{v}_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\phi} \vec{z}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_0}$ car pivot en O_0 entre S_0 et S_1

\Leftrightarrow varignon $\vec{v} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\phi} \vec{z}_0 \\ \vec{OO}_0 \wedge \dot{\phi} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0}$

$= \left\{ \begin{matrix} \dot{\phi} \vec{z}_0 \\ l \dot{\phi} \vec{z}_0 \wedge \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0}$

$\{\vec{v}_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\phi} \vec{z}_0 \\ l \dot{\phi} \vec{x}_L \end{matrix} \right\}_{O_0}$

III.2) Étude cinématique de la bille dans la tige :

Q21) a) $\vec{v}_{G_1/1} = \left. \frac{d\vec{OG}_1}{dt} \right|_1 = \left. \frac{dR\vec{x}_L}{dt} \right|_1$

car Rot $\vec{v} = R \left. \frac{d\vec{x}_L}{dt} \right|_1$

dérivée intrinsèque $\vec{v} = R \left(\left. \frac{d\vec{x}_L}{dt} \right|_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_L \right)$

$= R \left(\dot{\theta} \vec{z}_L \wedge \vec{x}_L \right)$

$$\underline{\vec{V}_{G \in 2/1} = R \dot{\theta} \vec{y}_L}$$

Q21) b)

RSh en I entre S1 et S2 : $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{V}_{I \in 1/1} = \vec{0}$

$$\text{or } \left\{ \vec{V}_{2/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2/1} \vec{z}_1 \\ \vec{V}_{G \in 2/1} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2/1} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_L \end{array} \right\}_G$$

Variation \rightarrow

$$\left\{ \vec{V}_{2/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2/1} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_L + \vec{IG} \wedge \omega_{2/1} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_I$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2/1} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_L - R_L \vec{x}_L \wedge \omega_{2/1} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_I$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2/1} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_L + R_L \omega_{2/1} \vec{y}_L \end{array} \right\}_I$$

$\vec{V}_{I \in 2/1}$ par définition de torse cinétique.

$$\text{Donc } (R \dot{\theta} + R_L \omega_{2/1}) \vec{y}_L = \vec{0}$$

$$\text{En projetant selon } \vec{y}_L, \text{ on a } R \dot{\theta} + R_L \omega_{2/1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{(R}_L \neq 0) \quad \underline{\omega_{2/1} = -\frac{R}{R_L} \dot{\theta}}$$

S Q22)

$$\left\{ \vec{V}_{2/0} \right\} = \left\{ \vec{V}_{2/1} \right\} = \left\{ \vec{V}_{1/0} \right\}$$

(point des axes)

$$\text{Q20) et Q22) } \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{R}{R_L} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_L \end{array} \right\}_G + \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} \vec{z}_0 \\ \dot{\phi} \vec{x}_L \end{array} \right\}_0$$

$$\text{Variation } \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{R}{R_L} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_L \end{array} \right\}_G + \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} \vec{z}_0 \\ \dot{\phi} \vec{x}_L + \vec{GO} \wedge \dot{\phi} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_G$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\dot{\phi} - \frac{R}{R_0} \dot{\theta} \right) \vec{y}_2 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_2 + l \dot{\phi} \vec{x}_2 + R \vec{x}_2 + l \dot{\phi} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$$

$$\left\{ \vec{U}_{2/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\dot{\phi} - \frac{R}{R_0} \dot{\theta} \right) \vec{y}_2 \\ (R \dot{\theta} + R \dot{\phi}) \vec{y}_2 + l \dot{\phi} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_G$$

III. 4) Comportement dynamique de la bille:

Q28)

$$\left\{ \mathcal{L}_{2/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_{G \in 2/0} \\ \vec{OG} \wedge \vec{V}_{G \in 2/0} + \underline{\underline{I}}_2(G) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} \end{array} \right\}_G$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} m_l [(R \dot{\theta} + R \dot{\phi}) \vec{y}_2 + l \dot{\phi} \vec{x}_2] \\ \frac{2}{5} m_l R_l^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ -\frac{R}{R_0} \dot{\theta} \end{pmatrix} \end{array} \right\}_G$$

$$\left\{ \mathcal{L}_{2/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_l [(R \dot{\theta} + R \dot{\phi}) \vec{y}_2 + l \dot{\phi} \vec{x}_2] \\ \frac{2}{5} m_l R_l^2 \left(\dot{\phi} - \frac{R}{R_0} \dot{\theta} \right) \vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$$

Q29)

$$\vec{\Sigma}_{G,210} = \left. \frac{d \vec{\alpha}_{G,210}}{dt} \right|_0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{5} m_e R_e^2 \left(\ddot{\phi} - \frac{R}{R_e} \ddot{\theta} \right) \vec{z}_0 \right) \Big|_0$$

$$(\text{car}) = \text{libre via} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{5} m_e R_e^2 \left(\ddot{\phi} - \frac{R}{R_e} \ddot{\theta} \right) \vec{z}_0 \right) + \frac{2}{5} m_e R_e^2 \left(\dot{\phi} - \frac{R}{R_e} \dot{\theta} \right) \frac{d \vec{z}_0}{dt} \Big|_0$$

$$\vec{\Sigma}_{G,210} = \frac{2}{5} m_e R_e^2 \left(\ddot{\phi} - \frac{R}{R_e} \ddot{\theta} \right) \vec{z}_0$$

III.5

Conditions de roulement sans glissement :

9

Q30)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -N \vec{x}_e + T \vec{y}_e \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\text{I}}$$

seraient nulles car contact unilatéral

le signe dépend des cas

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -N \vec{x}_e + T \vec{y}_e \\ G \vec{z}_e + (-N \vec{x}_e + T \vec{y}_e) \end{array} \right\}_{\text{a}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -N \vec{x}_e + T \vec{y}_e \\ R_e \vec{x}_e + (-N \vec{x}_e + T \vec{y}_e) \end{array} \right\}_{\text{a}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -N \vec{x}_e + T \vec{y}_e \\ R_e T \vec{y}_e \end{array} \right\}_{\text{a}}$$

à la limite du glissement $|T| = \mu |N|$

10

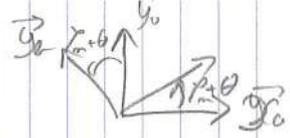
Q31)

On indexe 2 : BAME.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -N \vec{x}_e + T \vec{y}_e \\ T R_e \vec{z}_e \end{array} \right\}_{\text{a}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{\text{ga} \rightarrow 2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{\text{ga}} \vec{x}_e \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\text{a}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{\text{ind} \rightarrow 2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_{\text{ind}} \vec{z}_e \end{array} \right\}_{\text{a}}$$



$$\{\mathcal{T}_{g \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_a$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g (\cos(\phi + \theta) \vec{y}_a + \sin(\phi + \theta) \vec{x}_a) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_a$$

θ

PFS:

$$\{\mathcal{D}_{2/0}\} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{g \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{ind \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{y \rightarrow 2}\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_2 \vec{\Gamma}_{a \in 2/0} \\ \vec{\delta}_{a \in 2/0} \end{array} \right\}_a = \left\{ \begin{array}{c} -N \vec{x}_a + T \vec{y}_a + \vec{F}_g \vec{x}_a - m_2 g (\cos(\phi + \theta) \vec{y}_a + \sin(\phi + \theta) \vec{x}_a) \\ -C_{ind} \vec{z}_0 + T R_b \vec{z}_0 \end{array} \right\}_a$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_2 \vec{\Gamma}_{a \in 2/0} \cdot \vec{x}_a = -N + F_g + \sin(\phi + \theta) m_2 g \\ m_2 \vec{\Gamma}_{a \in 2/0} \cdot \vec{y}_a = T - m_2 g \cos(\phi + \theta) \\ \vec{\delta}_{a \in 2/0} \cdot \vec{z}_0 = -C_{ind} + T R_b \end{array} \right.$$

~~On comment~~ $\mathcal{P}_m \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = m_2 \vec{\Gamma}_{a \in 2/0} \cdot \vec{x}_a + F_g + \sin(\phi + \theta) m_2 g \\ T = m_2 \vec{\Gamma}_{a \in 2/0} \cdot \vec{y}_a + m_2 g \cos(\phi + \theta) \end{array} \right.$

Pour obtenir un RSCi, il faut que $|T| \leq \beta |N|$

$$\Leftrightarrow \left| m_2 \vec{\Gamma}_{a \in 2/0} \cdot \vec{y}_a + m_2 g \cos(\phi + \theta) \right| \leq \left| m_2 \vec{\Gamma}_{a \in 2/0} \cdot \vec{x}_a + F_g + m_2 g \sin(\phi + \theta) \right|$$

III.6 – Équation différentielle régissant le mouvement de la bille

11 Q32)

$$T_{(2/0)} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}_{2/0} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{2/0} \}$$

$$g_{(2/0)} \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & m_e [(R\dot{\theta} + R\dot{\phi}) \vec{y}_e + l\dot{\phi} \vec{x}_L] \\ & \frac{2}{5} m_e R^2 \left(\dot{\phi} - \frac{R}{R_e} \dot{\theta} \right) \vec{z}_0 \end{aligned} \right\} \otimes \left\{ \begin{aligned} & \dot{\phi} \left(\dot{\phi} - \frac{R}{R_e} \dot{\theta} \right) \\ & (R\dot{\theta} + R\dot{\phi})^2 \\ & + l^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{or } \vec{x}_L = \cos \theta \vec{x}_e - \sin \theta \vec{y}_e$$

$$\Rightarrow T_{(2/0)} = \frac{1}{2} \left(m_e \left[(R\dot{\theta} + R\dot{\phi} - l\dot{\phi} \sin \theta)^2 + (l\dot{\phi} \cos \theta)^2 \right] + \frac{2}{5} m_e R^2 \left(\dot{\phi} - \frac{R}{R_e} \dot{\theta} \right)^2 \right)$$

1 Q33)

B = point la plus basse. (IE elle est au bas du torc et bras vertical)

$$E_p = mg(B - B_0)$$

$$E_p = mg (l[1 - \cos \phi] + R[1 + \sin(\phi + \theta)])$$

↖ figure 7

1 Q34)

$$P_c = -c_e \|\vec{V}_{A,2/2}\|$$

$$= -c_e \left\| (R\dot{\theta} + R\dot{\phi}) \vec{y}_e + l\dot{\phi} \vec{x}_L \right\|^2$$

$$P_c = -c_e \left[(R\dot{\theta} + R\dot{\phi} - l\dot{\phi} \sin \theta)^2 + (l\dot{\phi} \cos \theta)^2 \right]$$

1 Q35)

$$\frac{dT_{(2/0)}}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

(car non réel strict)

$$P_{ext} = P_c + P_{g_{2/0}} + P_{c_{0 \rightarrow 2/0}} + P_{1 \rightarrow 2/0}$$

On dérive $T_{(2/0)}$ et on exprime P_{ext} à l'aide de la son

$$\mathcal{B}_{i \rightarrow j/k} = \{T_{i \rightarrow j}\} \otimes \{U_{j/k}\}$$

↳ l'équation n'est pas linéaire car $\sin \theta$ apparaît dans l'expression de $T_{i \rightarrow j}$.

~~Approx pour angles impetables car $\theta \in [0, 2\pi]$~~